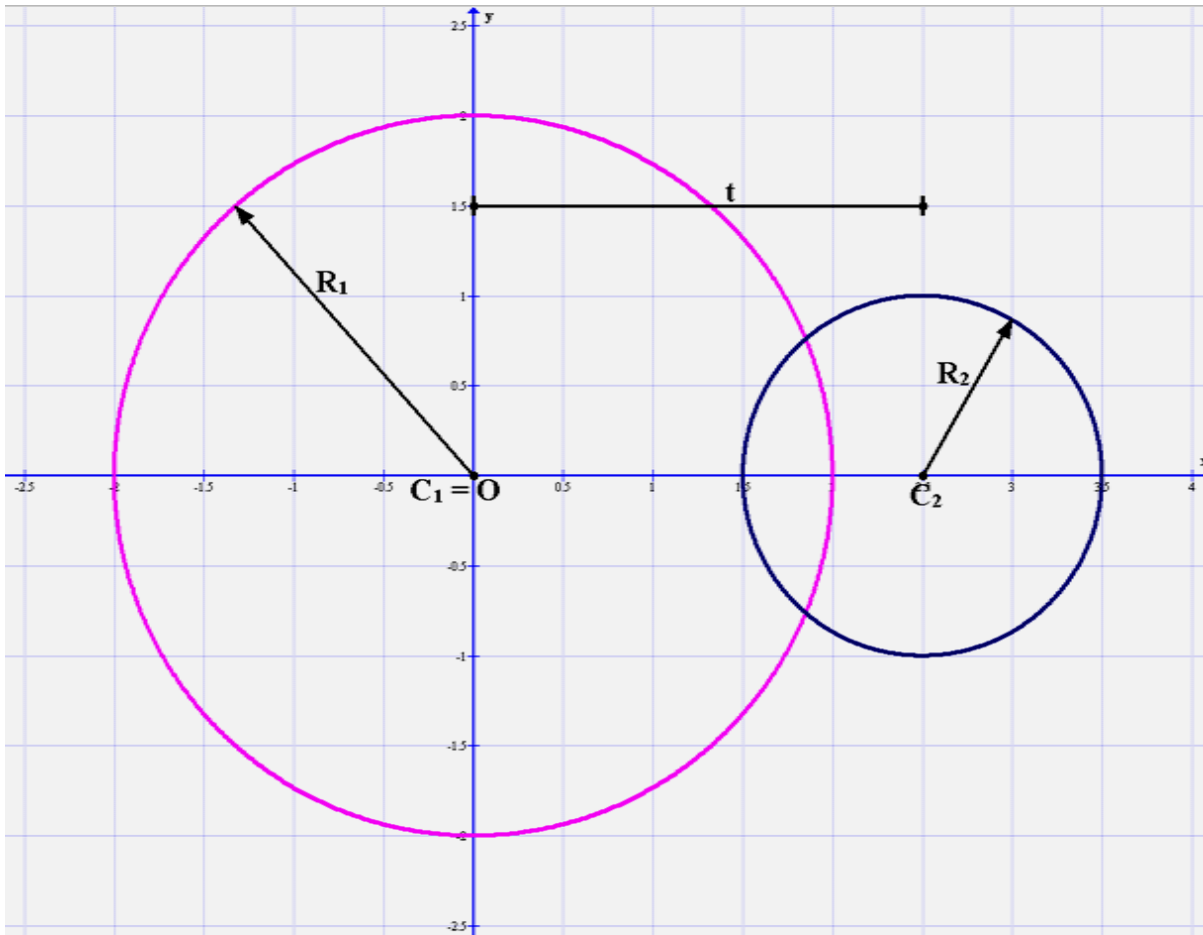


Két gömb áthatása

A feladat

Adottak az R_1 , R_2 sugarú gömbök, valamint középpontjaik t távolsága – 1. ábra. Határozzuk meg metszeti görbájük hosszát!



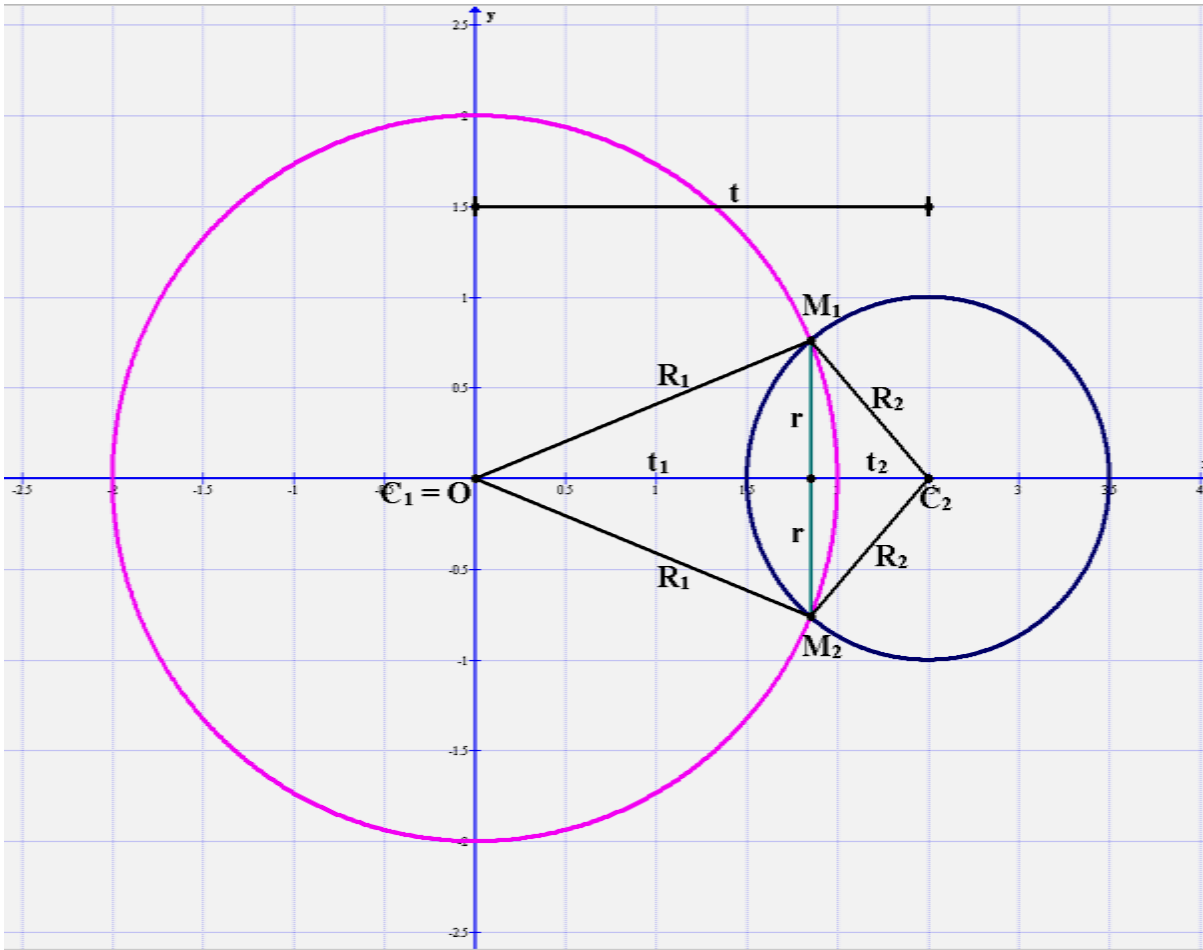
1. ábra

A megoldás

Ehhez tekintsük a 2. ábrát!

Itt a két gömb középpontján átmenő síkkal képzett síkmetszetek láthatók. A síkmetszeti görbék körök, hiszen egy gömb minden síkmetszete kör. A körök metszéspontjai M_1 és M_2 . E pontok a szimmetria miatt $2r$ távolságra vannak egymástól. Ha gondolatban megforgatjuk a 2. ábrát az x tengely körül, akkor látjuk, hogy a két gömb áthatási görbéje egy r sugarú kör, melynek kerülete adja a keresett áthatási görbe hosszát:

$$l = K = 2 \cdot \pi \cdot r. \quad (1)$$



2. ábra

Így a tényleges feladat a r sugár nagyságának kiszámítása. Ehhez *Pitagorász* tételét is felhasználjuk:

$$r^2 = R_1^2 - t_1^2, \quad (2)$$

$$r^2 = R_2^2 - t_2^2, \quad (3)$$

$$t = t_1 + t_2. \quad (4)$$

Most (2) és (3) - ből:

$$R_1^2 - t_1^2 = R_2^2 - t_2^2 \rightarrow R_1^2 - R_2^2 = t_1^2 - t_2^2 = (t_1 - t_2) \cdot (t_1 + t_2) \rightarrow$$

$$R_1^2 - R_2^2 = (t_1 - t_2) \cdot t, \text{ innen:}$$

$$\frac{R_1^2 - R_2^2}{t} = t_1 - t_2. \quad (5)$$

Majd (4) és (5) összeadásával:

$$t + \frac{R_1^2 - R_2^2}{t} = 2 \cdot t_1 \rightarrow \frac{R_1^2 - R_2^2 + t^2}{t} = 2 \cdot t_1,$$

ebből:

$$\underline{t_1 = \frac{t^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot t}}. \quad (6)$$

Ezután (4) és (5) kivonásával:

$$t - \frac{R_1^2 - R_2^2}{t} = 2 \cdot t_2 \rightarrow \frac{t^2 - (R_1^2 - R_2^2)}{t} = 2 \cdot t_2 ,$$

ebből:

$$t_2 = \frac{t^2 - (R_1^2 - R_2^2)}{2 \cdot t} . \quad (7)$$

Most pl.: (2) és (6) - tal:

$$r^2 = R_1^2 - t_1^2 = R_1^2 \cdot \left(1 - \frac{t_1^2}{R_1^2}\right) = R_1^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{t_1}{R_1}\right)^2\right] = R_1^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{t^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot R_1 \cdot t}\right)^2\right] ,$$

innen:

$$r = R_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R_1^2 - R_2^2 + t^2}{2 \cdot R_1 \cdot t}\right)^2} . \quad (8)$$

Majd (1) és (8) szerint:

$$l = 2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R_1^2 - R_2^2 + t^2}{2 \cdot R_1 \cdot t}\right)^2} . \quad (9)$$

Ezzel kitűzött feladatunkat megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó írja fel r képletét (3) és (7) - tel is!

M2. A feladat kiírása fentiek szerint:

Adott: R_1, R_2, t .

Keresett: l .

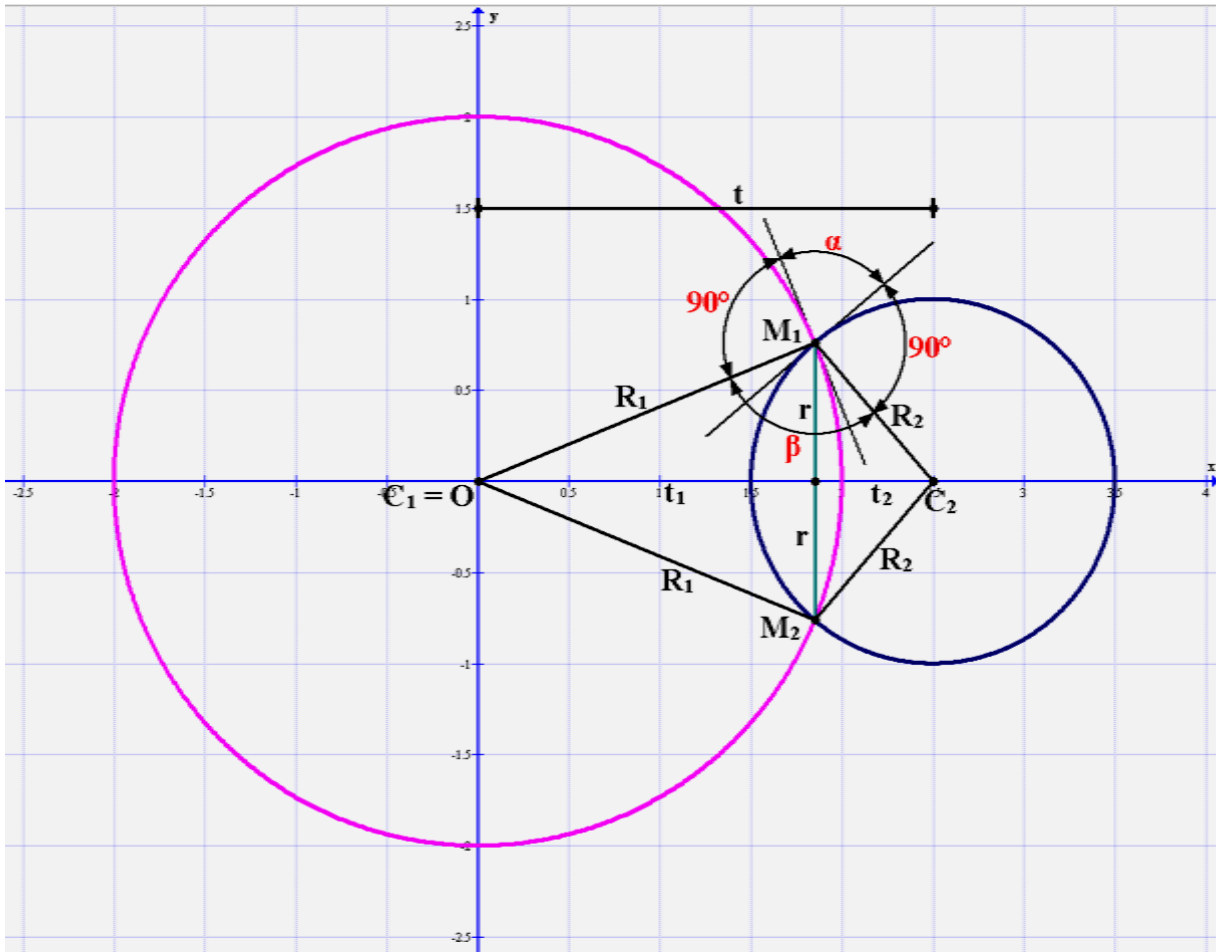
M3. Sok más esettel ellentétben itt az áthatási görbe hossza – pl. egy fonál segítségével – egyszerűen lemérhető.

M4. Adja magát a következő – kiegészítő – feladat is.

Határozzuk meg, hogy mekkora szögben metszik egymást a két gömb 1. ábrán is megraj - zolt körei!

A megoldáshoz tekintsük a 3. ábrát!

Itt megjelenítettük, hogy a két kör által közbezárt szög az M_1 metszéspontbéli érintőik által bezárt α szög. (Az M_2 metszéspontban ugyanez a helyzet, a szimmetria miatt.)



3. ábra

A 3. ábra szerint:

$$\alpha + 2 \cdot 90^\circ + \beta = 360^\circ \rightarrow \underline{\alpha = 180^\circ - \beta} . \quad (10)$$

Most a $C_1C_2M_1$ háromszögből koszinusztétellel:

$$t^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos \beta \rightarrow 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \cos \beta = R_1^2 + R_2^2 - t^2 \rightarrow \cos \beta = \frac{R_1^2 + R_2^2 - t^2}{2 \cdot R_1 \cdot R_2} \rightarrow \underline{\beta = \arccos\left(\frac{R_1^2 + R_2^2 - t^2}{2 \cdot R_1 \cdot R_2}\right)} . \quad (11)$$

Majd (10) és (11) - gyel:

$$\underline{\underline{\alpha = 180^\circ - \arccos\left(\frac{R_1^2 + R_2^2 - t^2}{2 \cdot R_1 \cdot R_2}\right)}} . \quad (12)$$

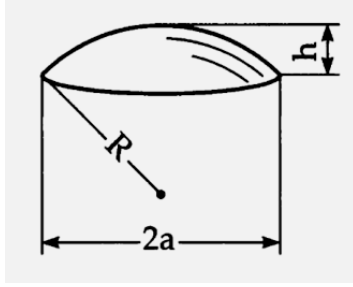
Ezzel a kiegészítő feladatot is megoldottuk. Ennek más alakú, (12) - vel egyenértékű megoldásai is vannak, attól függően, hogy milyen szögfüggvényekkel dolgozunk. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó keressen ilyen más alakú megoldásokat is!

M5. Eléggé kézenfekvően adódik az alábbi többlet - feladat is.

Határozzuk meg a két gömb egymásba metsződése után létrejött felület felszínét!

A megoldáshoz gondoljuk meg az alábbiakat!

Mindkét gömb csonkolva lett az M_1M_2 körlap síkjával. A levágás utáni megmaradt darabok felszíne – a gömbszelet palástképletével, ld.: 4. ábra! –, M helyett P - vel:



$$M = 2\pi R h \quad 4. \text{ ábra – forrása: [1]}$$

$$P_{R_1} = 2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot h_{R_1} , \quad h_{R_1} = R_1 + t_1 ; \quad (13)$$

$$P_{R_2} = 2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot h_{R_2} , \quad h_{R_2} = R_2 + t_2 . \quad (14)$$

Most a teljes palástfelszín, (6), (7), (13), (14) - gyel is:

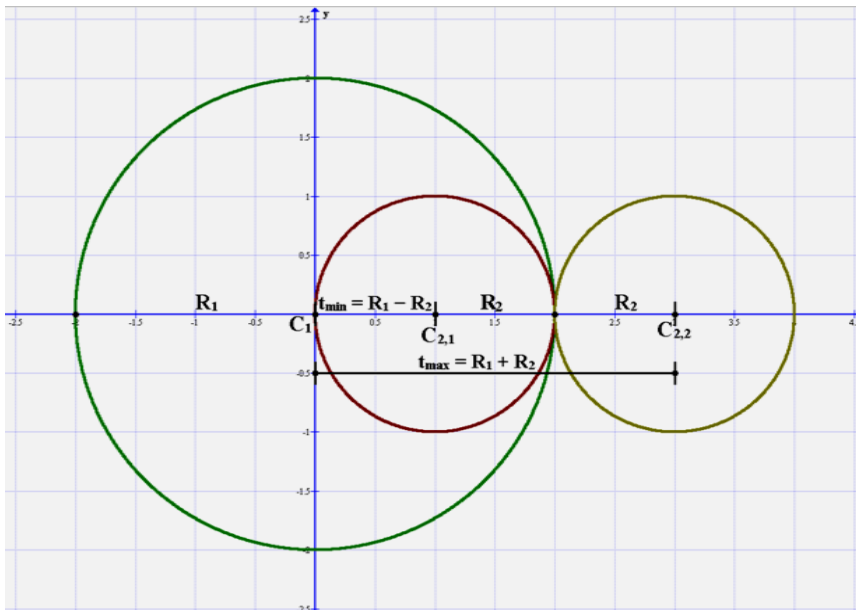
$$\begin{aligned} P_{\text{össz}} &= P_{R_1} + P_{R_2} = 2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot h_{R_1} + 2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot h_{R_2} = 2 \cdot \pi \cdot (R_1 \cdot h_{R_1} + R_2 \cdot h_{R_2}) = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \left\{ R_1 \cdot \left(R_1 + \frac{t^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot t} \right) + R_2 \cdot \left[R_2 + \frac{t^2 - (R_1^2 - R_2^2)}{2 \cdot t} \right] \right\} , \end{aligned}$$

tehát:

$$\underline{\underline{P_{\text{össz}} = 2 \cdot \pi \cdot \left\{ R_1 \cdot \left(R_1 + \frac{t^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot t} \right) + R_2 \cdot \left[R_2 + \frac{t^2 - (R_1^2 - R_2^2)}{2 \cdot t} \right] \right\} .}} \quad (15)$$

M6. A gömbök / körök középpontjainak távolságára az 5. ábra szerint írható, hogy:

$$R_1 - R_2 < t < R_1 + R_2 , \quad \text{ha } R_1 \geq R_2 . \quad (16)$$



5. ábra

Az 5. ábra az $r = 0$ eseteket mutatja. Nyilvánvaló, hogy minket az $r > 0$ esetek érdekelnek. Továbbá az is látható, hogy nem kell a 3. és 5. ábrák y tengelyre vett tükörképeivel foglalkoznunk; mert bár matematikailag azok is érvényes megoldások, viszont geometriailag nem mondanak újat. A „matematikailag” arra vonatkozik, hogy ha a t paraméter pl. az $(R_1 + R_2)$ értékről indulva tart a $-(R_1 + R_2)$ érték felé, akkor előáll egy olyan áthatás-sereg, melyek bizonyos részei egymás tükörképei az y tengelyre, ezért ezek közül csak az egyik rész érdekes számunkra, melyet – kényelmi okok miatt – a (16) reláció határol be.

M7. Kezdjük látni, hogy a bemutatott feladat - csomag tartalmazhat meglepetéseket számunkra, ha már az elején kimondjuk, hogy ez egyszerű. Egy középiskolásnak nem biztos.

M8. Itt feltettük, hogy a feladat - megoldónak – pl. egy tanulónak – van matematikai képességgyűjteménye, használhatja azt és tudja is használni. E kitételek egyike sem magától értetődő, mostanság. Ugyanis a felszínszámításhoz szüksége van egy ilyen segédanyagra.

Forrás:

[1] – **I. N. Bronstein ~ K. A. Semendjajev ~ G. Musiol ~ H. Mühlig:**
Taschenbuch der Mathematik
6. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2005.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2022. 02. 06.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>